

Съдържание

Увод	i
Списък на означенията	vii
1 Геометрия и вариационно смятане	1
1.1 Равнинни криви	1
1.1.1 Полярна координатна система	2
1.1.2 Кривина	3
1.1.3 Уравнения на Frenet-Serret	5
1.2 Пространствени криви	6
1.2.1 Единичен допирателен вектор	6
1.2.2 Допирателна права и нормална равнина	8
1.2.3 Кривина	9
1.2.4 Главен нормален вектор	13
1.2.5 Главна нормала и оскулачна равнина	14
1.2.6 Бинормала. Подвижен триедър	16
1.2.7 Торзия	18
1.2.8 Уравнения на Frenet-Serret за пространствени криви	23
1.2.9 Основна теорема в локалната теория на кривите	25
1.3 Повърхнини	26
1.3.1 Повърхнини и параметрични криви	26
1.3.2 Първа фундаментална форма	27
1.3.3 Нормала към повърхнина	28
1.3.4 Втора фундаментална форма	29
1.3.5 Условия за интегрируемост на производните	33
1.4 Вариационно смятане	36
1.4.1 Уравнение на Euler-Lagrange	36
1.4.2 Първи интеграли на уравнението на Euler-Lagrange	38
1.4.3 Уравнение на Euler-Lagrange за две независими променливи	44
1.4.4 Уравнение на Euler-Lagrange за лагранжиани съдържащи производни от втори ред	48

2	Равнинни криви с кривина, която зависи единствено от разстоянието до фиксирана точка	49
2.1	Подвижен репер асоцииран с равнинна крива	49
2.2	Интегриране	51
2.3	Лемнискати на Bernoulli	51
2.4	Връзка между лемниската и еластиката	54
2.5	Спирали	55
2.6	Спирали на Sturm	56
2.7	Обобщени спирали на Sturm	57
2.7.1	Случаят когато $\sigma > 1$	57
2.7.2	Случаят когато $0 < \sigma < 1$	59
2.7.3	Подслучай когато $0 < \sigma < 1$ и $c = 0$	60
2.8	Криви на Serret	61
2.8.1	Обобщени криви на Serret	63
2.9	Овали на Cassini	65
2.9.1	Алтернативни параметризации	66
3	Биологични мембрани	71
3.1	Предмет и значение на биологичните мембрани	71
3.2	Видове мембрани	73
3.3	Функции на биомембраните	74
3.4	Химичен състав и физични свойства на биомембраните	75
3.4.1	Молекулен строеж и физикохимични свойства на мембранните липиди	76
3.4.2	Мембранни белтъци и гликопротеини	78
3.5	Мембранни модели и методи за изследване на биомембрани	80
3.5.1	Съвременни представи	80
3.6	Моделни мембранни структури	82
3.6.1	Липидни асоциати	82
3.6.2	Моделни изкуствени мембрани	85
4	Повърхностно напрежение и равновесие	89
4.1	Механично равновесие	89
4.1.1	Уравнение на Laplace - Young	89
4.1.2	Аксиално симетрични мембрани	90
4.1.3	Напрежения	92
4.1.4	Случаят $w = 0$	94
4.1.5	Форми и съответстващите им повърхнини	97
4.2	Повърхнини на Delaunay	97
4.2.1	Нодоиди и ундулоиди	98
4.2.2	Вътрешно уравнение на профилните криви на повърхнините на Delaunay	100
4.2.3	Някои полезни формули	102
4.2.4	Конструкция на Delaunay	103
4.2.5	Nodary	105
4.2.6	Undulary	106

4.3	Полиестерен балон и еластични криви	109
4.3.1	Енергия на огъване	112
4.3.2	Оригинална формулировка и третиране на задачата за еластичните криви	113
4.3.3	Параметрично представяне на кривината на еластиката	116
4.3.4	Вътрешно уравнение на еластиките	117
4.3.5	Форма на висяща верижка	119
4.3.6	Едномерни мембрани - еластики на Euler	122
4.4	Параметризация на Whewell	124
4.4.1	Въведение	124
4.4.2	Уравнения на равновесие	125
4.4.3	Еластики с напрежение	128
4.5	Геометрия на въртяща се течна капка	132
4.5.1	Инварианти на повърхнината	133
4.5.2	Параметризация чрез интеграли на Legendre	135
4.5.3	Параметризация чрез функции на Weierstrass	135
4.5.4	Вътрешно уравнение на профилните криви	138
4.5.5	Геодезични линни	138
4.5.6	Неизяснени въпроси	140
5	Уравнения на равновесните състояния на мембраните	143
5.1	Модел на Sanham	143
5.1.1	Основни предположения в модела	144
5.2	Модел на Helfrich и Deuling	145
5.3	Модел на Ou-Yang и Helfrich	147
5.3.1	Основни формули и дефиниции	148
5.3.2	Уравнение на формата	151
5.4	Симетрии на уравнението на формата	152
5.4.1	Декартови координати	153
5.4.2	Групово-инвариантни решения	154
5.4.3	Конформни координати	155
5.4.4	Уравнения на Ли	157
5.4.5	Определяща система уравнения	158
6	Точни решения и приложения	161
6.1	Ундулоиди и нервни влакна	161
6.1.1	Въведение	161
6.1.2	Модел	163
6.1.3	Параметризация	163
6.1.4	Параметри на разглежданите нервни влакна	165
6.1.5	Чувствителност на параметрите на равновесните форми	167
6.2	Математически модел на експеримента на Cole	169
6.2.1	Модел на Cole	170
6.2.2	Метод на Yoneda	172
6.2.3	Нодоиди и компресия на сферични яйцеклетки	173

6.3	Сливане на мембрани	176
6.3.1	Стеблов модел	176
6.3.2	Математически модел	177
6.3.3	Геометрични и енергетични аспекти	180
6.4	Цилиндрични мембрани	182
6.4.1	Транслационно-инвариантни решения	182
6.4.2	Аналитични решения	184
6.4.3	Условия за затваряне	186
6.4.4	Самопресичане	188
6.4.5	Клетки на Hele-Shaw	189
6.5	Отвъд повърхнините на Delaunay	190
6.5.1	Параметрични уравнения	192
Епилог		197
Допълнение А		199
A.1	Елиптични интеграли и функции	199
A.2	Елиптични функции на Jacobi	200
A.3	Елиптични функции на Weierstrass	204
Библиография		207